b) Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n+1}(x) - f^n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\left(f(x)-1\right)\,dx.$$

$x \mapsto f^n(x)\left(f(x)-1\right)$ continue

sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

- $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$f^n(x) \geq 0.$$

- $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad 0 \leq \tan(x) \leq 1$

La fonction tan est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Donc $0 \leq \tan^2(x) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$

Donc $1 - f(x) \leq 0$